FOGLIO DI ESERCIZI 4

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico e $\mathscr{B}$ una base per la topologia di X. Dimostrare che X è di Hausdorff se e solo se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono due aperti $U, V \in \mathscr{B}$ tali che

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Esercizio 2. Dimostrare che uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se per ogni $x \in X$ l'intersezione di tutti gli intorni *chiusi* di x è $\{x\}$.

Esercizio 3. Dare un esempio di due applicazioni continue $f, g \colon X \to Y$ fra due spazi topologici X e Y e di un sottoinsieme denso $D \subset X$ tali che f e g concidano su D ma *non* su X (si noti che, per un risultato visto a lezione, Y non può essere di Hausdorff).

Esercizio 4. (Unicità del limite).
Sia X uno spazio topologico. Chiameremo *successione a valori in* X un'applicazione $f : \mathbb{N} \to X$. Se $f(n) = x_n$, indicheremo la successione con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Diremo poi che un punto $p \in X$ è un *limite* per $\{x_n\}$ (o che $\{x_n\}$ *converge* a p), e scriveremo $x_n \to p$, se per ogni intorno U di p esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n \geq N$.

Dimostrare che se X è di Hausdorff allora il limite di $\{x_n\}$, se esiste, è unico. Mostrare con un esempio che questo è in generale falso se X non è di Hausdorff.

Esercizio 5. Sia X uno spazio di Hausdorff, $Y \subseteq X$ un sottospazio di X e $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva, con la proprietà che la restrizione di f ad Y sia l'identità di Y. Dimostrare che Y è un chiuso di X. Dare poi un esempio di tale f quando

$$X = \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad Y = S^1.$$